BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2010

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА

В.М.НАМАЗОВ
Бакинский Государственный Университет
Институт Прикладной Математики
v_namazov@box.az

В данной работе рассматривается граничная задача при больших значений комплексного параметра λ. Граничное условие рассмотренной задачи не удовлетворяет условию P (регулярности). Следовательно, исследование таких задач представляет определенный математический интерес. Получено для нулей характеристического определителя функции Грина асимптотическое представление и определено их расположение в комплексной плоскости. Для решения задачи получено асимптотическое представление, справедливое вне малой δ окрестности нулей характеристического определителя функции Грина.

Во многих вопросах прикладного характера приходится рассматривать граничную задачу вида

$$\frac{d^2y^{(i)}}{dx^2}-\left(\lambda\sigma^{(i)}\right)^2y^{(i)}=F^{(i)}(x,\lambda),\quad x\in(a_i,b_i),\ (i=1,2),\tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&y^{(1)}(a_1,\lambda)+\left.\frac{dy^{(2)}}{dx}\right|_{x=a_2}=\gamma_1,\\
&\left(1+\lambda\sigma^{(1)}\right)y^{(i)}(b_1,\lambda)+\left.\frac{dy^{(1)}}{dx}\right|_{x=b_1}+\left.\frac{dy^{(2)}}{dx}\right|_{x=a_2}=\gamma_2\\
&y^{(2)}(a_2,\lambda)=\gamma_3,\\
&\left(1+\lambda\sigma^{(2)}\right)y^{(2)}(b_2,\lambda)+\left.\frac{dy^{(2)}}{dx}\right|_{x=b_2}=\gamma_4,
\end{aligned}\right\},\tag{2}$$

где λ - комплексный параметр; $|\lambda|\geq R$ - достаточно большое число, (a_i,b_i) - взаимно непересекающиеся интервалы, имеющие общие концы, $\gamma_s\left(s=\overline{1,4}\right)$ - постоянные числа, $\sigma^{(i)}(i=1,2)$ - комплексные числа, $F^{(i)}(x,\lambda)$ $(i=1,2)$ - заданные непрерывные функции по x в (a_i,b_i). В нашем случае $F^{(i)}(x,\lambda)$ - многочлен первой степени по λ.

Из (1), (2) видно, что граничная задача решается для уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами при граничных условиях, связывающих значения искомых функций и их производных первого порядка по x не только на концах основного интервала, но и в точке разрыва коэффициентов уравнений. Далее, для коэффициентов уравнений бесконечно удаленная точка является полюсом второго порядка. Пусть выполняется условие:

а) корни $\varphi_k^{(i)}$ $(k=1,2)$ характеристического уравнения

$$\left(\theta^{(i)}\right)^2-\left(\sigma^{(i)}\right)^2=0 \quad (i=1,2) \tag{3}$$

различны и отличны от нуля, аргументы этих корней и аргументы их разностей не зависят от индекса i.

Условие а) означает, что их можно представить в виде

$$\theta_i^{(i)}=-\theta_2^{(i)}=\left|\sigma^{(i)}\right|c\,;$$

где c комплексное постоянное: $c=e^{\sqrt{-1}\alpha}$, $\alpha=\arg c$.

В силу условия а) множество значений λ, удовлетворяющих уравнению $\operatorname{Re}\lambda\theta_1^{(i)}=\operatorname{Re}\lambda\theta_2^{(i)}$ или $\operatorname{Re}\lambda\left(\theta_1^{(i)}-\theta_2^{(i)}\right)=0$, составляет прямую, проходящую через начало координат λ плоскости:

$$\begin{gathered} cos(arg\,\lambda+\alpha)=0, \\ arg\,\lambda=\pm\frac{\pi}{2}-\alpha. \end{gathered} \tag{4}$$

Уравнение (4) всю λ плоскость разбивает на две полуплоскости π_1 и π_2, где π_1 - правая, а π_2 - левая полуплоскости. При этом предполагается, что при подходящей нумерации корней характеристического уравнения в каждой из полуплоскостей π_k $(k=1,2)$ выполняются неравенства

$$\operatorname{Re}\lambda\varphi_1^{(i)}\le\operatorname{Re}\lambda\varphi_2^{(i)}. \tag{5}$$

Например, если $\varphi_1^{(i)}=\theta_2^{(i)}=-\sigma^{(i)}$, $\varphi_2^{(i)}=\theta_1^{(i)}=\sigma^{(i)}$, то неравенства (5) выполняются в π_1 и обратно, если $\varphi_1^{(i)}=\theta_1^{(i)}=\sigma^{(i)}$, $\varphi_2^{(i)}=\theta_2^{(i)}=-\sigma^{(i)}$, то в полуплоскости π_2 будут выполняться неравенства (5). Дальнейшие рассуждения будем вести в полуплоскости π_2. Рассуждения в полуплоскости π_1 проводится аналогично. Для однородных уравнений, соответствующих уравнениям (1), фундаментальную систему частных решений записываем в виде

$$y_k^{(i)}(x,\lambda)=e^{\lambda\varphi_k^{(i)}(x-a_i)} \quad (k=1,2) \tag{6}$$

как в полуплоскости π_2, так и в полуплоскости π_1.

Следуя [1], для решения задачи (1), (2) при $\Delta(\lambda)\neq 0$ получим

$$y^{(i)}(x,\lambda)=\frac{\Delta^{(i)}(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}+\sum_{j=1}^{2}\int_{a_j}^{b_j}G^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)F^{(j)}(\xi,\lambda)d\xi, \quad (i=1,2), \tag{7}$$

где $$G^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)=\frac{\Delta^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\ . \tag{8}$$

- функция Грина задачи (1), (2), $\Delta(\lambda)$ характеристический определитель четвертого порядка с элементами $u_{sk}^{(i)}(\lambda)=L_s^{(i)}\left(y_k^{(i)}(x,\lambda)\right)$, $\left(s=\overline{1,4};\ k,i=1,2\right)$, $L_s^{(i)}$ оператор граничных условий. Вычисляя $\Delta(\lambda)$, его можно записать в виде формулы

$$\Delta(\lambda)=\prod_{i=1}^{2}\left(e^{\lambda\omega_i\varphi_2^{(i)}}-\left(1+2\lambda\varphi_1^{(i)}\right)e^{\lambda\omega_i\varphi_1^{(i)}}\right), \tag{9}$$

где $\omega_i=b_i-a_i$; $\varphi_2^{(i)}=-\left|\sigma^{(i)}\right|c$; $\varphi_1^{(i)}=\left|\sigma^{(i)}\right|c$, справедливой в полуплоскости π_2.

$\Delta^{(i)}(x,\lambda)$ $(i=1,2)$ - определители пятого порядка. При $i=1$ элементами первой строки $\Delta^{(1)}(x,\lambda)$ являются $\left(0,y_1^{(1)}(x,\lambda),y_2^{(1)}(x,\lambda),0,0\right)$ а при $i=2$ элементами первой строки $\Delta^{(2)}(x,\lambda)$ являются $\left(0,0,0,y_1^{(2)}(x,\lambda),y_2^{(2)}(x,\lambda)\right)$. Числа $\left(0,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\right)$ являются элементами первого столбца определителя $\Delta^{(i)}(x,\lambda)$. Разлогая $\Delta^{(i)}(x,\lambda)$ по элементам первой строки и первого столбца получим:

$$\Delta^{(i)}(x,\lambda)=y_1^{(i)}(x,\lambda)\sum_{s=1}^{4}\gamma_S\Delta_{S,2i-1}(\lambda)+y_2^{(i)}(x,\lambda)\sum_{s=1}^{4}\gamma_s\Delta_{s,2i}(\lambda)\ \ (i=1,2), \tag{10}$$

причем в определителе $\Delta^{(i)}(x,\lambda)$, $\Delta(\lambda)$ - является алгебраическим дополнением элемента, стоящего на пересечении первой строки с первым столбцом; $\Delta_{s,k}(\lambda)$ обозначает алгебраическое дополнение элемента определителя $\Delta(\lambda)$.

$\Delta^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)$ также определитель пятого порядка. При $i=1$ в определителе $\Delta^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)$ элементами первой строки будут $\left(g^{(1,j)}(x,\xi,\lambda),y_1^{(1)}(x,\lambda),y_2^{(1)}(x,\lambda),0,0\right)$, а при $i=2$ - $\left(g^{(2,j)}(x,\xi,\lambda),0,0,y_1^{(2)}(x,\lambda),y_2^{(2)}(x,\lambda)\right)$ в $\Delta^{(2,j)}(x,\xi,\lambda)$. Элементы первого столбца $\Delta^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)$ являются $\left(g^{(i,j)}(x,\xi,\lambda),g_1^{(j)}(\xi,\lambda),g_2^{(j)}(\xi,\lambda),g_3^{(j)}(\xi,\lambda),g_4^{(j)}(\xi,\lambda)\right)$, где $g_k^{(j)}(\xi,\lambda)$ $\left(k=\overline{1,4}\right)$ обозначает $L_k^{(j)}\left(g^{(j)}\right)_x$ результат применения оператора $L_k^{(j)}$ к $g^{(j)}$, как к функции от x. Теперь $\Delta^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)$ разложим по элементам первой строки:

$$\Delta^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)=g^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)\Delta(\lambda)+y_1^{(i)}(x,\lambda)\Delta_{1,2i}^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)+y_2^{(i)}(x,\lambda)\Delta_{1,2i+1}^{(i,j)}(x,\xi,\lambda), \tag{11}$$

где

$$g^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left\{y_1^{(i)}(x,\lambda)z_1^{(i)}(\xi,\lambda)+y_2^{(i)}(x,\lambda)z_2^{(i)}(\xi,\lambda)\right\}, & \text{при } a_i\le\xi\le x\le b_i,\\ -\dfrac{1}{2}\left\{y_1^{(i)}(x,\lambda)z_1^{(i)}(\xi,\lambda)+y_2^{(i)}(x,\lambda)z_2^{(i)}(\xi,\lambda)\right\}, & \text{при } a_i\le x\le\xi\le b_i,\quad j=i,\\ 0 & \text{при } j\ne i;\end{cases} \tag{12}$$

$$z_1^{(i)}(\xi,\lambda)=\frac{-y_2^{(i)}(\xi,\lambda)}{W^{(i)}(\xi,\lambda)},\qquad z_2^{(i)}(\xi,\lambda)=\frac{y_1^{(i)}(\xi,\lambda)}{W^{(i)}(\xi,\lambda)},$$

$$W^{(i)}(\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} y_1^{(i)}(\xi,\lambda) & y_2^{(i)}(\xi,\lambda) \\ \dfrac{dy_1^{(i)}}{d\xi} & \dfrac{dy_2^{(i)}}{d\xi} \end{vmatrix}, \tag{13}$$

$\Delta_{1,2i}^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)$ и $\Delta_{1,2i+1}^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)$ алгебраические дополнения элементов, стоящих на пересечении первой троки с соответствующими столбцами. Функции $\Delta(\lambda),\Delta^{(i)}(x,\lambda)$ и $\Delta^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)$ в формулах (9), (10) и (11) являются целыми аналитическими функциями параметра λ. Поэтому из формулы (8) следует, что функция Грина есть мероморфная функция параметра λ: ее полюсами могут быть лишь нули $\Delta(\lambda)$ [2]. По теореме 2 [3] $\Delta(\lambda)$ имеет бесконечное множество комплексных нулей. Действительно, приравнивая к нулю $\Delta(\lambda)$ имеем:

$$e^{\lambda\omega_i\varphi_2^{(i)}}-\left(1+2\lambda\varphi_1^{(i)}\right)e^{\lambda\omega_i\varphi_1^{(i)}}=0 \quad \text{или}$$

$$e^{-2\lambda\omega_i\varphi_i^{(i)}}-\left(1+2\lambda\varphi_i^{(i)}\right)=0,\ \ (i=1,2). \tag{14}$$

Из (14) следует, что нули уравнения (14) расположены в левой полуплоскости и имеют асимптотические представления:

$$\lambda_\eta^{(i)}=\frac{-1}{2\omega_i\varphi_i^{(i)}}ln\left(2A^{(i)}n\pi\right)\pm\sqrt{-1}\,\frac{\left(2n\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)}{2\omega_i\varphi_1^{(i)}}-\frac{1}{2\varphi_1^{(i)}}+O\left(\frac{ln\,n}{n}\right)\ \ (i=1,2),$$

$$\lambda_n^{(i)}=-a^{(i)}\,ln\,n\pm\sqrt{-1}b^{(i)}n+c^{(i)}+0\left(\frac{ln\,n}{n}\right)\ (i=1,2), \tag{15}$$

где $a^{(i)}=\dfrac{1}{2\omega_i\varphi_1^{(i)}},\ b^{(i)}=\dfrac{\pi}{\omega_i\varphi_1^{(i)}},\ c^{(i)}=-\dfrac{1}{2\varphi_1^{(i)}}\left(1+\dfrac{1}{\omega_i}ln\dfrac{2e^{-\omega_i}\pi}{\omega_i}\pm\dfrac{\pi}{2\omega_i}\right).$

Из (15) следует, что нули расположены в секторах $\left(\dfrac{\pi}{2}<arg\ \lambda^{(i)}<\dfrac{3\pi}{4};\ \dfrac{5\pi}{4}<arg\ \lambda^{(i)}<\dfrac{3\pi}{2}\right).$

Согласно лемме 4 [1], если из вышеуказанных секторов удалить внутренности малых кругов радиуса δ (такие круги существуют, так как $\left|\lambda_n-\lambda_{n+1}\right|\geq L$ - постоянное) с центрами в нулях уравнения (14), то в оставшейся части этих секторов выполняется неравенство

$$\left|\Delta(\lambda)\right|\geq K_\delta. \tag{16}$$

Пусть S_ν - часть сектора $\dfrac{\pi}{2}\leq\arg\lambda^{(i)}\leq\dfrac{3\pi}{4}$, ограниченная дугами окружностей O_1 и O_ν, радиусами r_1 и r_ν, с центрами в начале координат и содержащая внутри N_ν нулей функции $\Delta(\lambda)$. Рассмотрим последовательность $\{S_\nu\}$. Нетрудно показать, что в каждом S_ν для числа N_ν нулей $\Delta(\lambda)$ имеет место асимптотическое представление

$$N_\nu^{(i)}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(r_\nu^{(i)}-r_1^{(i)}\right)+Q_\nu^i, \tag{17}$$

где $Q_\nu^{(i)}$ ограничены числом, независимы от γ и i. Оценки (16) и (17) справедливы и для части сектора $\left(\frac{5\pi}{4} \le \arg \lambda^{(i)} \le \frac{3\pi}{2},\ \ r_1 \le r \le r_\gamma\right)$. Таким образом, доказана

Теорема 1. При условии а) имеют место следующие утверждения:

1. Характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ функции Грина $G^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)$ задачи (1)-(2) имеет бесконечное множество нулей. Число N_ν нулей $\Delta(\lambda)$, расположенных внутри $S_\nu\left(\frac{\pi}{2} \le \arg \lambda \le \frac{3\pi}{4};\ r_1 \le r \le r_\nu\right)$, определяется по формуле (17).
2. Если из секторов $\left(\frac{\pi}{2} \le arg\,\lambda^{(i)} \le \frac{3\pi}{4};\ r_1 \le r \le r_\nu\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4} \le arg\lambda^{(i)} \le \frac{3\pi}{2},\ r_1 \le r \le r_\nu\right)$ выбросить внутренности малых кругов радиуса δ с центрами в нулях λ_ν функции $\Delta(\lambda)$, то в оставшееся части секторов S_ν выполняется неравенство
$$|\Delta(\lambda)| > K_\delta > 0\,.$$
3. Если нули λ_ν функции $\Delta(\lambda)$ занумеровать в порядке возрастания их модулей, то для них справедливо неравенство
$$|\lambda_N| \le Mr_\gamma\,,$$

где K_δ и M - некоторые положительные постоянные.

Из формулы (10) следует, что $\Delta_{k,2i-1}(\lambda), \Delta_{k,2i}(\lambda)$ $\left(k = \overline{1,4},\quad i = 1,2\right)$ обозначают алгебраические дополнение соответствующего элемента определителя $\Delta(\lambda)$. А из (9) видно, что коэффициенты при показательных функциях многочлены по λ степени не выше двух. Следовательно, $\Delta_{k,2i-1}(\lambda)$ и $\Delta_{k,2i}(\lambda)$ $\left(k=\overline{1,4},\quad i=1,2\right)$ не могут содержать степени λ выше, чем два. Теперь, если за $\varphi_1^{(i)}$ принимать $\theta_1^{(i)}$ и за $\varphi_2^{(i)} - \theta_2^{(i)}$, то в полуплоскости π_2 имеют место оценки:
$$\left.\begin{aligned} &\left|\Delta_{k,2i-1}(\lambda)\right| \le C|\lambda|^2\left|e^{\lambda\left(\varphi_2^{(1)}\omega_1+\varphi_2^{(2)}\omega_2\right)}\right| \\ &\left|\Delta_{k,2i}(\lambda)\right| \le C|\lambda|^2\left|e^{\lambda\left(\varphi_2^{(1)}\omega_1+\varphi_2^{(2)}\omega_2-\varphi_2^{(i)}\omega_i\right)}\right| \end{aligned}\right\},\quad i = 1,2\,. \tag{18}$$

Аналогичные оценки будут справедливыми в полуплоскости π_1, если за $\varphi_1^{(i)}$ принимать $\theta_2^{(i)}$ и за $\varphi_2^{(i)} - \theta_1^{(i)}$. Подставляя в (10) вместо $y_k^{(i)}(x,\lambda)$ - $e^{\lambda\varphi_k^{(i)}(x-a_i)}$ $(k=1{,}2)$ и деля обе части (10) на $\Delta(\lambda)$, в силу второго утверждения теоремы 1 и оценки (18), в полуплоскости π_2 справедлива оценка
$$\left|\frac{\Delta^{(i)}(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right| \le Q_{1\delta}\left|e^{\lambda\varphi_1^{(i)}(x-a_i)}\right| + Q_{2\delta}\left|e^{\lambda\varphi_2^{(i)}(x-b_i)}\right|, \tag{19}$$

где $Q_{1\delta}$ и $Q_{2\delta}$ - числа, зависящие только от δ.
Таким образом доказана

Теорема 2. При условии а) если из сектора $\frac{\pi}{2} \le \arg\lambda \le \frac{3\pi}{4}$ выбросить внутренности малых кругов радиуса δ с центрами в нулях λ_ν, то в оставшихся частях будут выполняться неравенство (19); корни характеристического уравнении занумерованы так, что как в полуплоскости π_1, так и в π_2 удовлетворяются неравенства

$$\operatorname{Re}\lambda\varphi_1^{(i)} \le 0, \quad \operatorname{Re}\lambda\varphi_2^{(i)} \ge 0.$$

Из формул (6), (12) и (13) следует, что они содержат показательные функции с неотрицательными действительными частями. Поэтому определитель $\Delta^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)$ надо преобразовать так, чтобы первый столбец полученного не содержал показательных функций с неотрицательными действительными частями показателей. Для этого в определителе $\Delta^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)$ столбцы $\begin{pmatrix} \bullet \\ u_{11}^{(j)} \\ \vdots \\ u_{41}^{(j)} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \bullet \\ u_{12}^{(j)} \\ \vdots \\ u_{42}^{(j)} \end{pmatrix}$ умножим, соответственно, на $\frac{1}{2}z_1^{(j)}(\xi,\lambda) - \frac{1}{2}z_2^{(j)}(\xi,\lambda)$ и сложим с первым столбцом. Полученный определитель обозначим через $\Delta_0^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)$. Очевидно, что $\Delta^{(i,j)}(x,\xi,\lambda) = \Delta_0^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)$. Элементы первого столбца $\Delta_0^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)$ обозначим

$$\left(g_0^{(i,j)}(x,\xi,\lambda),\ g_{10}^{(j)}(\xi,\lambda), g_{20}^{(j)}(\xi,\lambda), g_{30}^{(j)}(\xi,\lambda), g_{40}^{(j)}(\xi,\lambda)\right)^T.$$

Тогда формулы (11) и (12) записываются в виде

$$g_0^{(i,j)}(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} y_1^{(i)}(x,\lambda)z_1^{(i)}(\xi,\lambda) & \text{при } a_i \le \xi \le x \le b_i \\ -y_2^{(i)}(x,\lambda)z_2^{(i)}(\xi,\lambda) & \text{при } a_i \le x \le \xi \le b_i \\ 0 & \text{при } j \ne i, \end{cases} \tag{20}$$

$$\Delta_0^{(i,j)}(x,\xi,\lambda) = \Delta(\lambda)g_0^{(i,j)}(x,\xi,\lambda) + y_1^{(i)}(x,\lambda)\Delta_{0,1,2i}^{(i,j)}(x,\xi,\lambda) + y_2^{(i)}(x,\lambda)\Delta_{0,1,2i+1}^{(i,j)}(x,\xi,\lambda). \tag{21}$$

С учетом (6) из (20) имеем

$$z_1^{(i)}(\xi,\lambda) = \frac{e^{-\lambda\varphi_1^{(i)}(\xi-a_i)}}{2\lambda\varphi_1^{(i)}}, \qquad z_2^{(i)}(\xi,\lambda) = \frac{e^{-\lambda\varphi_2^{(i)}(\xi-a_i)}}{2\lambda\varphi_2^{(i)}}.$$

При этом (20) можно записать в виде

$$g_0^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\lambda\varphi_1^{(i)}}e^{\lambda\varphi_1^{(i)}(x-\xi_i)} & при\ \ a_i\le\xi\le x\le b_i\\ \dfrac{-1}{2\lambda\varphi_2^{(i)}}e^{\lambda\varphi_2^{(i)}(x-\xi_i)} & при\ \ a_i\le x\le\xi\le b_i\\ 0 & при\ \ j\ne i.\end{cases} \tag{22}$$

В полуплоскости π_2 $\quad g_{k0}^{(j)}(\xi,\lambda)$ $\left(k=\overline{1,4}\right)$ определяются следующим образом

$$g_{10}^{(1)}(\xi,\lambda)=\frac{1}{2\lambda\varphi_2^{(1)}}e^{\lambda\varphi_2^{(1)}(a_1-\xi)},\ \ g_{20}^{(1)}(\xi,\lambda)=\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2\lambda\varphi_1^{(1)}}e^{\lambda\varphi_1^{(1)}(b_1-\xi)}\right),$$

$$g_{30}^{(1)}(\xi,\lambda)=g_{40}^{(1)}(\xi,\lambda)=0,\qquad g_{10}^{(2)}(\xi,\lambda)=-\frac{1}{2}e^{\lambda\varphi_2^{(2)}(a_2-\xi)},$$

$$g_{20}^{(2)}(\xi,\lambda)=-\frac{1}{2}e^{\lambda\varphi_2^{(2)}(a_2-\xi)},\ \ g_{30}^{(2)}(\xi,\lambda)=-\frac{1}{2\lambda\varphi_2^{(2)}}e^{\lambda\varphi_2^{(2)}(a_2-\xi)},$$

$$g_{40}^{(2)}(\xi,\lambda)=\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2\lambda\varphi_1^{(2)}}e^{\lambda\varphi_1^{(2)}(b_2-\xi)}\right). \tag{23}$$

При подходящей нумерации корней характеристического уравнения, формулы (23) будут справедливыми и в полуплоскости π_1. Разлогая определители $\Delta_{0,1,2i}^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)$ и $\Delta_{0,1,2i+1}^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)$ по элементам первого столбца, формулы (21) запишем в виде

$$\begin{aligned}\Delta_0^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)&=\Delta(\lambda)g_0^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)+\\&+y_1^{(i)}(x,\lambda)\sum_{k=1}^{4}g_{k0}^{(i)}(\xi,\lambda)\Delta_{k,2i-1}(\lambda)+y_2^{(i)}(x,\lambda)\sum_{k=1}^{4}g_{k0}^{(i)}(\xi,\lambda)\Delta_{k,2i}(\lambda),\end{aligned} \tag{24}$$

где $\Delta_{ks}(\lambda)$ - алгебраическое дополнение соответствующего элемента определителя $\Delta(\lambda)$.

Если из секторов $\left(\frac{\pi}{2}\le arg\,\lambda\le\frac{3\pi}{4};\ \ \frac{5\pi}{4}\le arg\,\lambda\le\frac{3\pi}{2}\right)$ выбросить внутренности кругов малого радиуса δ с центрами в нулях, $\Delta(\lambda)$ то в оставшейся части секторов, с помощью формул (6) и (23) для $\dfrac{\Delta^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ в полуплоскости π_2, согласно теоремам 1 и 2, получится асимптотическое представление

$$\begin{aligned}\frac{\Delta^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}&=g_0^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)+\\ e^{\lambda\varphi^{(i)}(x-a_i)}&\left(e^{\lambda\varphi_2^{(j)}(a_j-\xi)}\varepsilon_{11}^{(i,j)}(\lambda)+e^{\lambda\varphi^{(j)}(b_j-\xi)}\varepsilon_{12}^{(i,j)}(\lambda)\right)+\\ e^{\lambda\varphi^{(i)}(x-b_i)}&\left(e^{\lambda\varphi_2^{(j)}(a_j-\xi)}\varepsilon_{21}^{(i,j)}(\lambda)+e^{\lambda\varphi^{(j)}(b_j-\xi)}\varepsilon_{22}^{(i,j)}(\lambda)\right),\end{aligned} \tag{25}$$

где $\varepsilon_{ks}^{(i,j)}(\lambda)$ $(k,\delta=1,2)$ - функции, ограниченные вне δ - окрестности нулей $\Delta(\lambda)$. Таким образом, доказана

Теорема 3. При условии а) если из сектора $\left(\frac{\pi}{2}\le arg\lambda\le\frac{3\pi}{4};\quad \frac{5\pi}{4}\le arg\lambda\le\frac{3\pi}{2}\right)$ удалить круги малого радиуса δ с центрами в нулях $\Delta(\lambda)$, то в оставшейся части имеет место асимптотическое представление (25).

Из доказанных теорем 1 – 3, с учетом формул (6) и (25), для решения (7) задачи (1), (2) вне δ окрестности нулей $\Delta(\lambda)$ имеет место асимптотическое представление

$$y^{(i)}(x,\lambda)=e^{\lambda\varphi_1^{(i)}(x-a_i)}A^{(i)}(\lambda,\gamma)+e^{\lambda\varphi_2^{(i)}(x-b_i)}B^{(i)}(\lambda,\gamma)+\sum_{j=1}^{2}\int_{a_j}^{b_j}\Big\{g_0^{(i,j)}(x,\xi,\lambda)+$$
$$+e^{\lambda\varphi_1^{(i)}(x-a_i)}\big(e^{\lambda\varphi_2^{(j)}(a_j-\xi)}\varepsilon_{11}^{(i,j)}(\lambda)+e^{\lambda\varphi_1^{(j)}(b_j-\xi)}\varepsilon_{12}^{(i,j)}(\lambda)\big)+$$
$$+e^{\lambda\varphi_2^{(i)}(x-b_i)}\big(e^{\lambda\varphi_2^{(j)}(a_j-\xi)}\varepsilon_{12}^{(i,j)}(\lambda)+e^{\lambda\varphi_1^{(j)}(b_j-\xi)}\varepsilon_{22}^{(i,j)}(\lambda)\big)\Big\}F^{(j)}(\xi,\lambda)d\xi,\quad (i=1,2), \tag{26}$$

где $A^{(i)}(\lambda,\gamma)=\sum_{k=1}^{4}\gamma_k\varepsilon_{k1}^{(i)}(\lambda)$, $B^{(i)}(\lambda,\gamma)=\sum_{k=1}^{4}\gamma_k\varepsilon_{k2}^{(i)}(\lambda)$, $\varepsilon_{k\delta}^{(i,j)}(\lambda)$ $(k,i,s=1,2)$ - функции, ограниченные вне δ - окрестности нулей $\Delta(\lambda)$. Формула (26) справедлива как в полуплоскости π_2 так и в π_1 при подходящей нумерации $\varphi_1^{(i)}$ и $\varphi_2^{(i)}$ так, чтобы выполнялись неравенства $Re\,\lambda\varphi_1^{(i)}\le Re\,\lambda\varphi_2^{(i)}$ $(i=1,2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла. М.: Наука, 1964, 256 с.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, 47 с.
3. Маркушевич А.И. Целые функции. М.: Наука, 1965, 95 с.
4. Расулов М.Л. Применение вычетного метода к решению задач дифференциальных уравнений. Баку: Элм, 1989, 195 с.
5. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А. Моделирование работы газлифтной скважины // Доклады НАН Азербайджана, 2008, №4, с. 107-115.
6. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Б.Н. Проблемы математического моделирования оптимизации и управления газлифта // Доклады НАН Азербайджана, 2009, №2, с. 43-57.
7. Ильясов М.Х., Алиев Н.А., Алиев А.М., Рустамова Л.А. Об одном методе решения задачи для гиперболических систем уравнений // Доклады НАН Азербайджана, 2010, т. 64, №1, с. 3-8.

BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİ ÜÇÜN ASİMPTOTİK İFADƏ VƏ QRİN FUNKSİYASININ XARAKTERİSTİK DETERMİNANTININ TƏDQİQİ

V.M.NAMAZOV

XÜLASƏ

İşdə kompleks parametrin böyük qiymətlərində bir sərhəd məsələsinə baxılır. Sərhəd şərti P (requlyarlıq) şərtini ödəmir. Ona görə belə məsələlərin tədqiqi müəyyən riyazi maraq doğurur. Qrin funksiyasının xarakteristik determinantının sıfırları üçün asimptotik ifadə alınır, onların kompleks müstəvidə yerləşməsi müəyyən olunur. Məsələnin həlli üçün xarakteristik determinantın sıfırlarının kiçik δ ətrafından kənarda doğru olan asimptotik ifadə alınır.

AN ASYMPTOTIC EXPRESSION FOR THE SOLUTION OF ONE BOUNDARY PROBLEM AND INVESTIGATION OF THE DETERMINANT OF GREEN'S FUNCTION

V.M.NAMAZOV

SUMMARY

In the paper a boundary problem is considered for the large complex parameter. The asymptotic formulas are obtained for the zeros of the characteristic determinant of Green's function; their replacement in the complex plane is defined. The asymptotic expressions are obtained for the solution of the considered problem which are valid out of the δ-neighborhood of the zeros of the characteristic determinant.